**Лекция 2. Свойства решений в основном случае**

Можно показать, что решения системы (1.1), (1.2), а также систем (1.4), (1.9), (1.2) ограничены. Эти свойства решений могут быть использованы при оценке несобственных интегралов.

**Теорема 1.** *Пусть матрица  – гурвицева, т.е.  функция  и пусть, кроме того, выполнены равенства (1.3) и ранг  Тогда верны оценки:*

* (1.11)*

* (1.12)*

* (1.13)*

*где *

*Кроме того, функции  равномерно непрерывны*.

**Доказательство.** *Из включения  следует, что  Так как матрица  – гурвицева, т.е. , то  – сколь угодно малое число [13; § 13, неравенство (7)].*

Решение дифференциального уравнения (1.1) имеет вид:



Тогда









где . Отсюда следует ограниченность решения системы (1.1), (1.2). Из (1.1) следует, что





Итак, доказаны оценки (1.11), (1.13). Так как  то  Следовательно, верны оценки из (1.12). Из ограниченности производных  следуют равномерные непрерывности функций  соответственно. Теорема доказана.

Следует отметить, что: 1) Из оценки  имеем  2) Из оценки  имеем 

**Лемма 3.** *Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда вдоль решения системы (1.10) верны тождества*

** (1.14)

** (1.15)

** (1.16)

*где .*

**Доказательство.** *Из лемм 1, 2 следуют тождества* (1.4)*,* (1.9)*. Тогда из последнего тождества* (1.4) *следует равенство* (1.14)*. Тождества* (1.15)*,* (1.16) *следуют из* (1.9)*, где  Лемма доказана.*

Тождества (1.14) – (1.16) позволяют использовать свойства функции  из включения  для вычисления несобственных интегралов.

**Лемма 4.** *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица  – гурвицева, функция  Тогда:*

*1) для любой постоянной матрицы  порядка  квадратичная форма  представима в виде*

* (1.17)*

*где  – постоянная матрица порядка *

*2) Несобственный интеграл*

* (1.18)*

* (1.19)*

*где *

**Доказательство.** Поскольку квадратичная форма  содержит слагаемые с постоянными коэффициентами произведения компонентов вектора  то вычислим значения  Легко убедиться в том, что:

а) если  – нечетные числа , то



б) если  – нечетное,  – четное число , то



в) если  – четное,  – нечетное число , то



г) если  – нечетное,  – нечетное число , то



д) если  – нечетное,  – нечетное число , то



е) если  – нечетное,  – четное число , то



ж) если  – четное,  – нечетное число , то



з) если  – четное,  – четное число , то



В частности, для значений  имеем:



где 

Для значений 





Подставляя значения  в квадратичную форму  получим представление (1.17). Интегрируя тождество (1.17) с учетом оценки (1.12) получим соотношения (1.18), (1.19). Лемма доказана.

**Лемма 5.** ***1****Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица  – гурвицева, функция  и пусть, кроме того:*

*1) скалярная непрерывная функция  при любом *

*2) несобственный интеграл *

*Тогда *

**Доказательство.** Заметим, что при выполнении условия лемм 1, 2, матрица  – гурвицева, функция  верно утверждение теоремы 1. Следовательно, 

Пусть выполнены все условия леммы. Покажем, что 

Предположим противное т.е.  Тогда существует последовательность  такая, что  Выберем  Поскольку функция  непрерывно дифференцируема и  то  Тогда



где  по выбору величины  Так как  то



Тогда



Это противоречит 2) условию леммы. Лемма доказана.